Definicija i modeli geometrije incidencije

Definicija (geometrija)

Geometrija je skup tački $\mathcal{P}$ i skup pravih $\mathcal{L}$ zajedno sa relacijama između tački i pravih.

(#) Odrediti četri tačke koje pripadaju skupu

$$\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sqrt{5}\}.$$

Rj.

Npr. $P(\sqrt{5}, 0) \in \mathcal{M}$

$Q(\sqrt{5}, 7) \in \mathcal{M}$

$R(\sqrt{5}, \sqrt{5}) \in \mathcal{M}$

$M(\sqrt{5}, \frac{-3}{2}) \in \mathcal{M}$

(#) Neka je $M=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R},\ x<0\}$.

(i) Odrediti tri tačke koje pripadaju skupu $N=\{(x,y)\in M \mid x=\sqrt{2}\}$

(ii) Da li $P(3;3)$, $Q(6;4)$, $R(-2;\frac{4}{2})$ pripadaju skupu

$$\mathcal{L}=\{(x,y)\in M \mid y=\frac{1}{3}x+2\}$$

Rj.

(i) Primjetimo da sve tačke iz M kao prvu koordinatu imaju negativan broj.

Kako je u N $x=\sqrt{2}$ i $(x,y)\in M \Rightarrow N=\emptyset$.

(ii)

$$y=\frac{1}{3}x+2$$

Provjerimo da li vrijedi jednakost za tačku P

$$3=\frac{1}{3}\cdot 3+2=1+2=3$$

ali $3>0 \Rightarrow P\notin\mathcal{L}$

$$Q(\underbrace{6}_{>0};4)\notin\mathcal{L}$$

$-2<0$ $\quad y=\frac{1}{3}(-2)+2=-\frac{2}{3}+\frac{6}{3}=\frac{4}{3} \Rightarrow R(-2;\frac{4}{2})\in\mathcal{L}$.

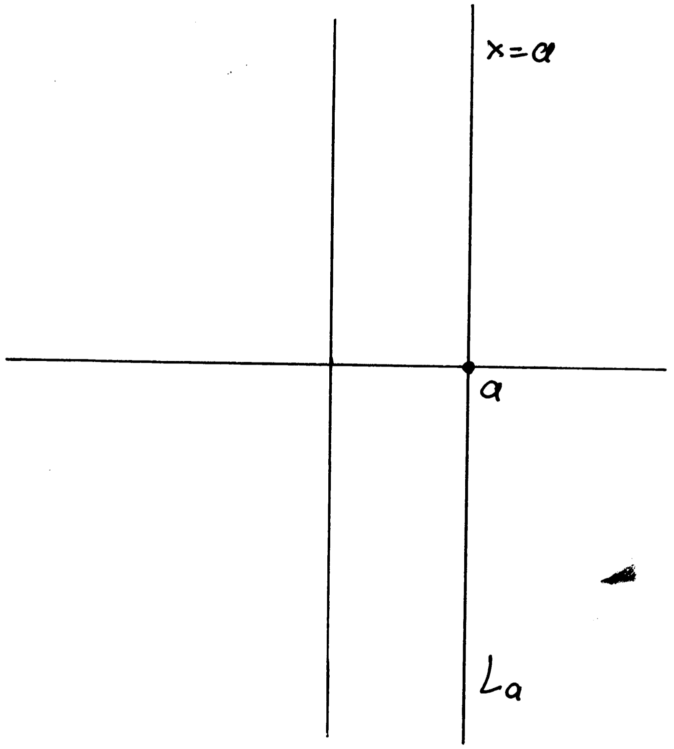
Definicija (Dekartova ravan)

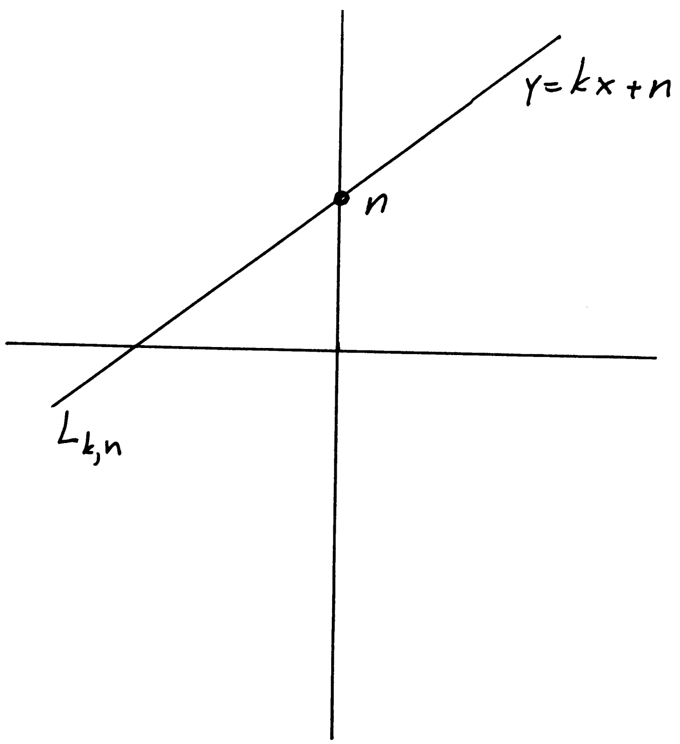
Neka je $\mathcal{L}_E$ skup svih vertikalnih i ne-vertikalnih pravih, L_a i $L_{k,n}$ gdje su

vertikalne prave: $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a,\ a \text{ je fiksiran realan broj}\}$

ne-vertikalna prava: $L_{k,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx + n,\ k \text{ i } n \text{ su fiksirani realni brojevi}\}$

Model $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ nazivamo Dekartova ravan.





\# (i) Pronaći tri različite tačke koje pripadaju Dekartovoj vertikalnoj liniji L_7.

(ii) Pronaći tri različite tačke koje pripadaju Dekartovoj ne-vertikalnoj liniji $L_{15,\sqrt{2}}$.

Rj.: (i) $L_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 7\}$

$A(7, \frac{3}{2}) \in L_7$

$B(7, -4) \in L_7$

$C(7, 0) \in L_7$

(ii) Opišimo skup $L_{15,\sqrt{2}}$

$$L_{15,\sqrt{2}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 15x + \sqrt{2}\}$$

$P(1, 15+\sqrt{2}) \in L_{15,\sqrt{2}}$

$Q(0, \sqrt{2}) \in L_{15,\sqrt{2}}$

$R(-\frac{\sqrt{2}}{15}, 0) \in L_{15,\sqrt{2}}$

(#) Neka je P tačka u Dekartovoj ravni $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$.
Pokazati da tačka P ne može istovremeno pripadati dvijema različitim pravama L_a i $L_{a'}$ (gdje je $a \neq a'$).

skup tački

Rj: Dekartova ravan $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$

skup pravih

$$L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a, \ a \text{ je fiksiran realan broj}\}$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da tačka $P(x_1, y_1)$ istovremeno pripada različitim pravama L_a i $L_{a'}$ (gdje je $a \neq a'$).

$$\left.\begin{array}{l} P \in L_a \Rightarrow x_1 = a \\ P \in L_{a'} \Rightarrow x_1 = a' \end{array}\right\} \Rightarrow a = x_1 = a' \Rightarrow a = a'$$

#kontradikcija

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.
Tačka P ne može istovremeno pripadati pravama L_a i $L_{a'}$ $(a \neq a')$.

Definicija (Poincarejeva ravan)

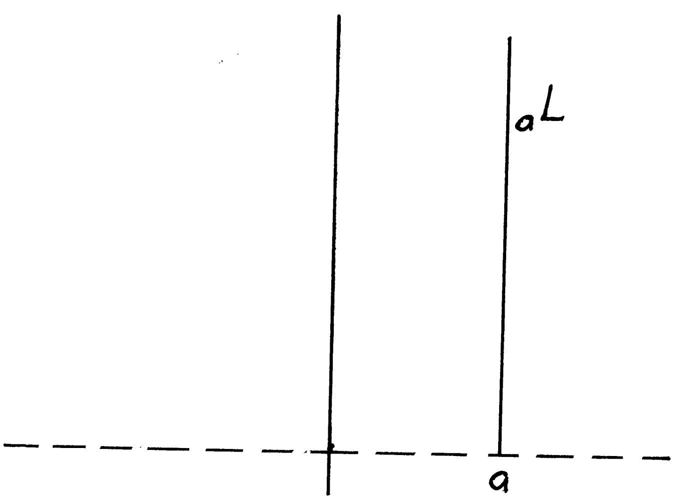
Neka je $\mathcal{L}_H$ skup svih pravih tipa I i II, ${}_aL$ i ${}_pL_r$ gdje su

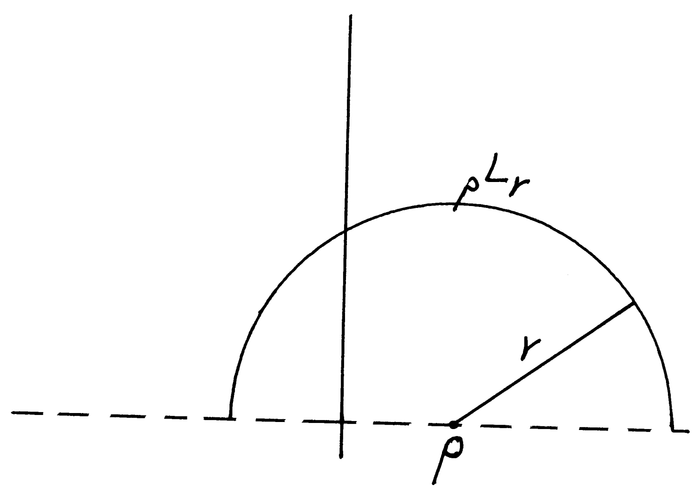
prave tipa I: $\quad {}_aL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a,$ a je fiksiran realan broj$\}$

prave tipa II: $\quad {}_pL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-p)^2 + y^2 = r^2,$ p i r su fiksirani realni brojevi, $r > 0\}$

$$\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

Model $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ nazivamo Poincarejeva ravan.





(#) Odrediti Poincarejeve prave kroz tačke

(i) $P(1,2)$ i $Q(3,4)$;

(ii) $M(2,1)$ i $N(4,3)$.

$\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

${}_aL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a\}$

${}_pL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-p)^2 + y^2 = r^2,\ r > 0\}$

Rj.:

(i) $P(1,2) \Rightarrow x_1 = 1,\ y_1 = 2$

$Q(3,4) \Rightarrow x_2 = 3,\ y_2 = 4$

Kako $x_1 \neq x_2$ to $P, Q \notin {}_aL$

Odredimo p i r za koje vrijedi da $P, Q \in {}_pL_r$.

$P:\ (1-p)^2 + 2^2 = r^2$

$Q:\ (3-p)^2 + 4^2 = r^2$

$1 - 2p + p^2 + 4 = r^2$

$-\ \ 9 - 6p + p^2 + 16 = r^2$

$-8 + 4p - 12 = 0$

$4p = 20$

$p = 5$

$p = 5:\quad r^2 = (1-5)^2 + 2^2$

$r^2 = 16 + 4$

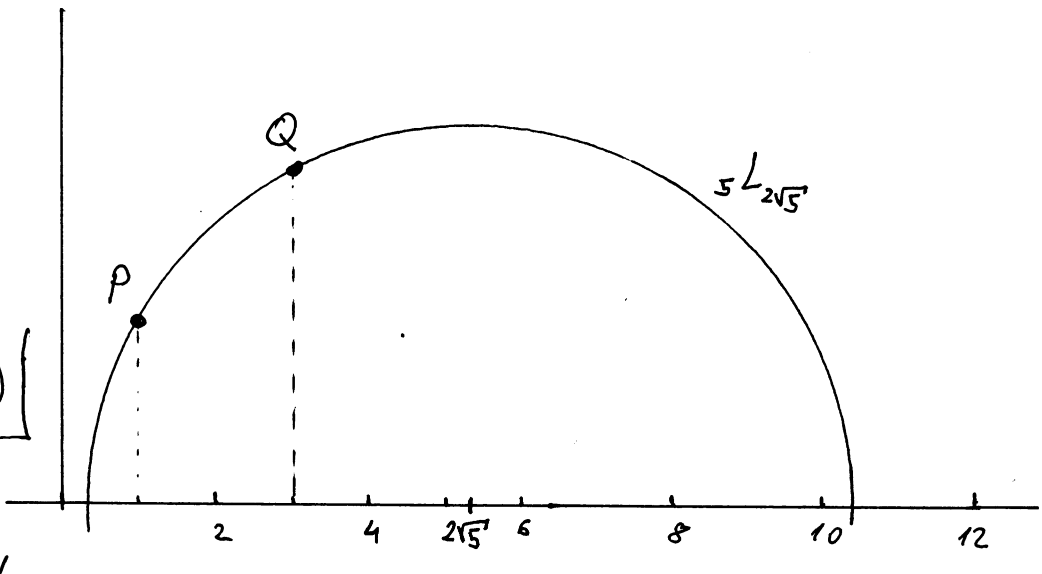
$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}4721$

$P, Q \in {}_5L_{2\sqrt{5}}$

GeoGebra

$(x-5)^2 + y^2 = (2 \times sqrt(5))^2$

sqrt((2*sqrt(5))^2 - (x-5)^2)



Provjerimo dobijeno rješenje koristeći GeoGebru.

(ii) $M(2,1) \Rightarrow x_1=2,\ y_1=1$

$N(4,3) \Rightarrow x_2=4,\ y_2=3$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow M, N \notin {}_aL$

(nepostoji takvo a)

$$M: \quad (2-p)^2+1^2=r^2$$
$$N: \quad (4-p)^2+3^2=r^2$$

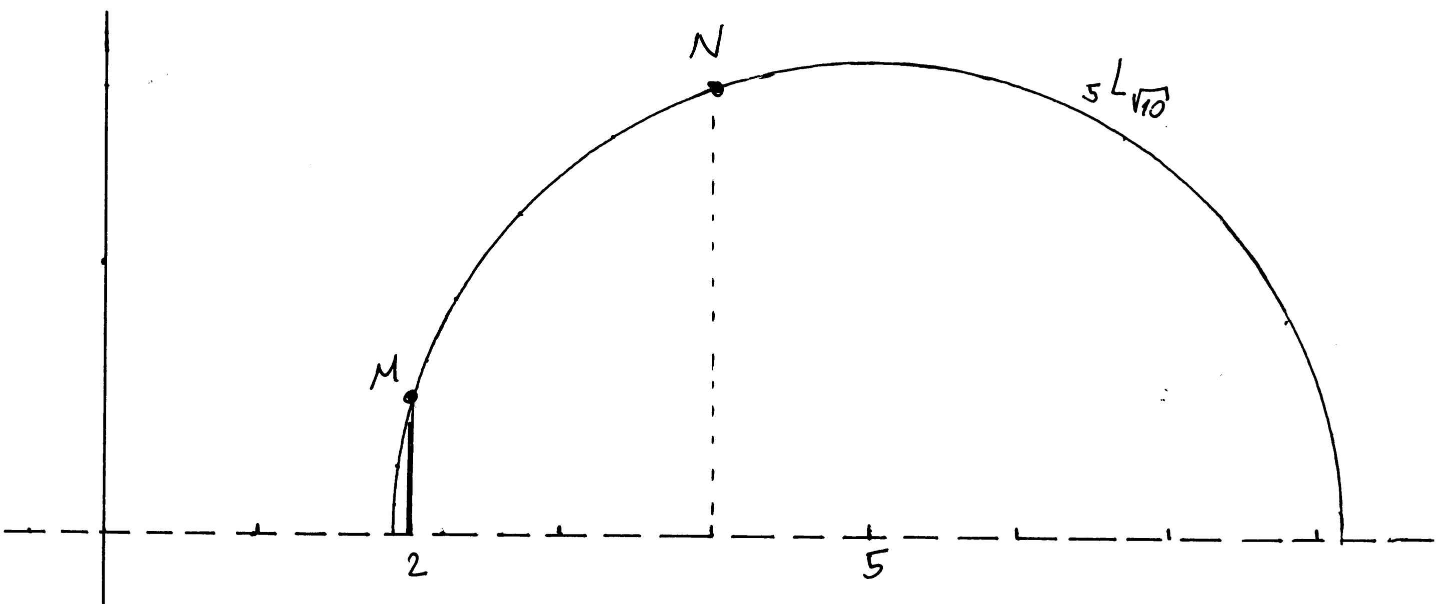
$$4-4p+p^2+1=r^2$$
$$-\quad 16-8p+p^2+9=r^2$$

$$-12+4p-8=0$$
$$4c=20$$
$$c=5$$

$$r^2=(2-5)^2+1^2$$
$$=9+1=10$$
$$r=\sqrt{10}$$

$\sqrt{10} \approx 3,1623$

$M, N \in {}_5L_{\sqrt{10}}$



Provjerimo rješenje koristeći GeoGebru

$$(x-5)^2+y^2=10$$
$$x=2$$
$$x=4$$

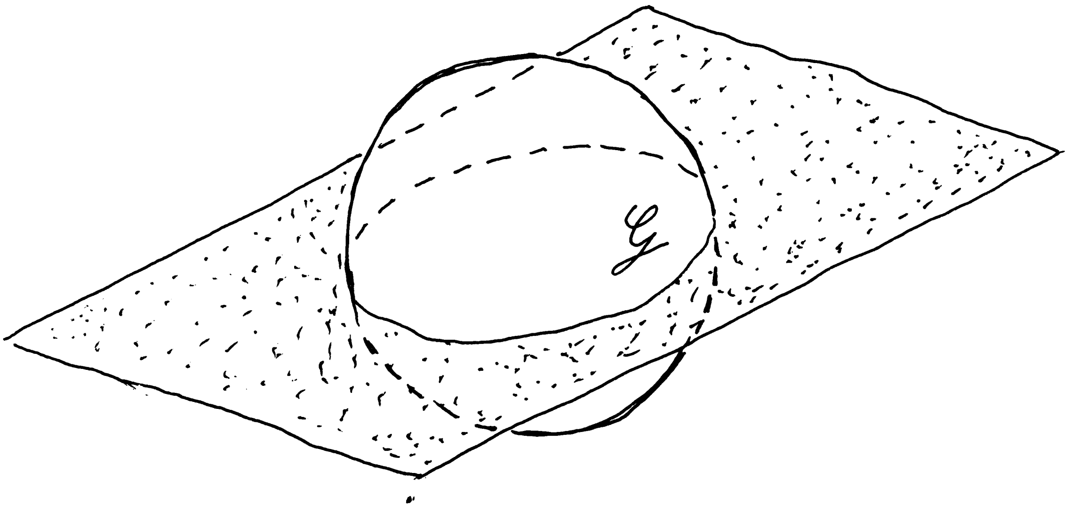
Definicija (jedinična sfera, ravan)

Jedinična sfera u $\mathbb{R}^3$ je

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Ravan u $\mathbb{R}^3$ je skup oblika

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d,\ a,b,c,d \text{ fiksirani realni brojevi i bar jedan od } a,b,c \text{ je različit od nule}\}$$



Definicija (glavni krug ili sferna prava)

Glavni krug $\mathcal{G}$ sfere S^2 je presjek od S^2 sa ravni koja prolazi kroz koordinatni početak. Drugim riječima

$$\mathcal{G} = \{(x,y,z) \in S^2 \mid ax+by+cz=0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ i } ax+by+cz=0,\ a,b,c \text{ su realni brojevi od kojih je bar jedan nenula}\}$$

GeoGebra

x^2 + y^2 + z^2 = 1

$x + y - (1/2) * z = 0$

pa odredi presjek sfere i ravni

(#) Odrediti sferne prave (glavne krugove) koje prolaze kroz tačke

(a) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ i $Q(1,0,0)$;

(b) $M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $N(0,1,0)$.

Rj.

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

ravan: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$

$$\mathcal{G} = \{(x,y,z)\in S^2 \mid ax+by+cz=0,\ a,b,c \text{ su fiksirani realni brojevi i bar jedan od njih je nenula}\}$$

(a) Prvo provjerimo da li tačke P i Q pripadaju jediničnoj sferi

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow P\in S^2$

$Q(1,0,0) \Rightarrow 1^2+0^2+0^2=1 \Rightarrow Q\in S^2$

Odredimo realne brojeve a,b,c takve da $P,Q\in\mathcal{G}$

$P:\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{2}}\,c=0$

$Q:\ 1a+0b+0c=0$

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{I_v\cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v-I_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \underset{II_v\cdot(-1)}{\overset{I_v+II_v}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja. Jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno.

$a=0$

$b+c\sqrt{2}=0$

$a=0 \quad b=-c\sqrt{2}, \quad c=t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\mathcal{G}=\{(x,y,z)\in S^2 \mid -\sqrt{2}ty+tz=0,$ t fiksiran realan broj različit od nule$\}$

Drugim riječima tačke P i Q pripadaju presjeku jedinične sfere i ravni $-\sqrt{2}y+z=0$ $\left(\mathcal{G}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \;;\; -\sqrt{2}y+z=0\}\right)$.

GeoGebra   x^2+y^2+z^2=1

(1/2, 1/2, sqrt(1/2)), (1,0,0), -sqrt(2)*y+z=0

(b) Provjerimo da li M i N pripadaju jediničnoj sferi.

$M(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow 0^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \Rightarrow M\in S^2$

$N(0,-1,0) \Rightarrow 0^2+(-1)^2+(0)^2=1 \Rightarrow N\in S^2$

$M: \; 0a+\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c=0 \quad /\cdot 2$

$N: \; 0a+(-1)b+0\cdot c=0$

$b+\sqrt{3}c=0$

$-b \quad\quad =0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v+I_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \overset{I_v-II_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$1b=0, \; \sqrt{3}c=0$, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

$a=t, \; b=0, \; c=0$, $t\in\mathbb{R}$

$\mathcal{G}=\{(x,y,z)\in S^2 \mid tx=0,$ t je fiksiran realan broj$\}$

$=\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2+z^2=1\}$

Definicija (kolinearan skup)

Za skup tački $\mathcal{P}$ kažemo da je kolinearan ako postoji prava p takva da $\mathcal{P} \subseteq p$.

$\mathcal{P}$ je nekolinearan skup ako $\mathcal{P}$ nije kolinearan skup.

Često ćemo reći "A, B i C su kolinearne tačke" umjesto "$\{A, B, C\}$ je kolinearan skup". Ova zloupotreba notacije i jezika će olakšati zapis tvrdnji za neke rezultate.

(#) Primjerom pokazati da postoje najmanje tri nekolinearne tačke u Dekartovoj ravni.

R; Dekartova ravan $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$

$\mathcal{L}_E$ skup svih vertikalnih i nevertikalnih pravih.

vertikalne prave: $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a$, a je fiksiran realan broj$\}$

ne-vertikalne prave: $L_{k,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx + n$, k i n su fiksirani realni brojevi$\}$

Posmatrajmo pravu L_7.

Imamo da $P(7,3), Q(7,-2) \in L_7$.

P, Q i R su nekolinearne tačke ako ne pripadaju istoj pravoj.

Za R izaberimo tačku $R(-1,0)$ i pokažimo da P, Q i R ne pripadaju istoj pravoj.

Jasno je da $R \notin L_7$ i da ne postoji c t.d. $P, Q, R \in L_c$.
Vertikalna prava ne postoji. Da li postoji ne-vertikalna prava koja sadrži ove tri tačke?
Posmatrajmo sistem

$$\left.\begin{array}{ll} P: & 3 = k \cdot 7 + n \\ Q: & -2 = k \cdot 7 + n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{7} = k + \frac{n}{7} \\ -\frac{2}{7} = k + \frac{n}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{7} = -\frac{2}{7}$$

#kontradikcija

$$R: \quad 0 = k(-1) + n$$

ne postoji ne-vertikalna prava koja sadrži P i Q.

P, Q i R su nekolinearne tačke.

Provjeriti da li $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ pripadaju Poincarejevoj pravoj ${}_pL_r$ gdje su

$$p = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)}; \qquad r = \sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2} .$$

Rj: Poincarejeva ravan $\mathcal{P} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_E\}$ ← skup tački, ← skup pravih

- skup tački: $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$\mathcal{L}_H$ je skup svih pravih tipa I i II, ${}_aL$ i ${}_pL_r$

$${}_aL = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x = a\}$$

$${}_pL_r = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - p)^2 + y^2 = r^2\}$$

$$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in {}_pL_r \iff (x_1 - p)^2 + y_1^2 = r^2 \text{ i } (x_2 - p)^2 + y_2^2 = r^2$$

Trebamo pokazati da za tačke P i Q vrijedi $(x_1 - p)^2 + y_1^2 = r^2$ i $(x_2 - p)^2 + y_2^2 = r^2$.

$$p = \frac{y_2^2 - y_1^2 + x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} \iff (2x_2 - 2x_1)p = y_2^2 \underline{\underline{- y_1^2}} + x_2^2 \underline{- x_1^2} \iff$$

$$\iff x_1^2 - 2x_1 p + y_1^2 = x_2^2 - 2x_2 p + y_2^2 \iff x_1 - 2x_1 p + p^2 + y_1^2 = x_2^2 - 2x_2 p + p^2 + y_2^2$$

$$\iff (x_1 - p)^2 + y_1^2 = (x_2 - p)^2 + y_2^2$$

Kako je $r = \sqrt{(x_1 - p)^2 + y_1^2}$ to je $(x_1 - p)^2 + y_1^2 = r^2$

i $(x_2 - p)^2 + y_2^2 = r^2$

q.e.d.

Neka su P i Q dvije različite tačke u Dekartovoj ravni $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$. Pokazati da P i Q ne mogu istovremeno pripadati pravama L_a i $L_{k,n}$.

Rj:

Dekartova ravan $\mathcal{E} = \{\underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{skup tački}}, \underbrace{\mathcal{L}_E}_{\text{skup pravih}}\}$

$L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a,\ a \text{ je fiksiran realan broj}\}$

$L_{k,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx + n,\ k, n \text{ su fiksirani realni brojevi}\}$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da tačke $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ (gdje $P \neq Q$) istovremeno pripadaju pravama L_a i $L_{k,n}$.

$$\left.\begin{array}{l} P \in L_a \Rightarrow x_1 = a \\ Q \in L_a \Rightarrow x_2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = a \Rightarrow P(a, y_1),\ Q(a, y_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} P \in L_{k,n} \Rightarrow y_1 = kx_1 + n = ka + n \\ Q \in L_{k,n} \Rightarrow y_2 = kx_2 + n = ka + n \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow P \equiv Q$$

#kontradikcija (sa pretpostavkom da je $P \neq Q$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna.

Prema tome dvije različite tačke ne mogu istovremeno pripadati pravama L_a i $L_{k,n}$.

#) Neka su P i Q dvije različite tačke iz Dekartove ravni $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ koje ne pripadaju istoj vertikalnoj pravoj. Pokazati da P i Q ne mogu istovremeno pripadati pravama $L_{k,n}$ i $L_{m,b}$ gdje je $L_{k,n} \neq L_{m,b}$.

Rj. Dekartova ravan $\mathcal{E} = \{\underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{skup tački}}, \underbrace{\mathcal{L}_E}_{\text{skup pravih}}\}$

$$L_{k,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx + n,\ k \text{ i } n \text{ su fiksirani realni brojevi}\}.$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. pretpostavimo da tačke $P(x_1,y_1)$ i $Q(x_2,y_2)$ (gdje $P \neq Q$) istovremeno pripadaju pravama $L_{k,n}$ i $L_{m,b}$.

prema postavci zadatka tačke P i Q ne pripadaju istoj vertikalnoj pravoj

$$\left.\begin{array}{lll} P \in L_{k,n} & \Rightarrow & y_1 = kx_1 + n \\ Q \in L_{k,n} & \Rightarrow & y_2 = kx_2 + n \end{array}\right\} \xRightarrow{x_1 \neq x_2} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad n = y_1 - kx_1.$$

Slično

$$\left.\begin{array}{lll} P \in L_{m,b} & \Rightarrow & y_1 = mx_1 + n \\ Q \in L_{m,b} & \Rightarrow & y_2 = mx_2 + n \end{array}\right\} \xRightarrow{x_1 \neq x_2} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad i \quad b = y_1 - mx_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sad imamo} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad i \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \Rightarrow \quad k = m \\ \text{Kako je} \quad n = y_1 - kx_1 \quad i \quad b = y_1 - mx_1 \quad \Rightarrow \quad n = b \end{array}\right\} \Rightarrow L_{k,n} = L_{m,b}$$

#kontradikcija

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Tačke P i Q nemogu istovremeno pripadati pravama $L_{k,n}$ i $L_{m,b}$.

(#) Ako su P i Q dvije različite tačke u $\mathbb{H}$ dokazati da tada one ne mogu istovremeno pripadati pravama ${}_aL$ i ${}_pL_r$.

Rj.

Poincareova ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$

$\mathbb{H}$ je skup tački $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$\mathcal{L}_H$ skup svih pravih ${}_aL$ i ${}_pL_r$

$${}_aL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a, \text{ a je fiksiran realan broj}\}$$

$${}_pL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-p)^2 + y^2 = r^2, \text{ p i r su fiksirani realni brojevi}, r > 0\}$$

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da tačke P i Q istovremeno pripadaju pravama ${}_aL$ i ${}_pL_r$ i dobijmo kontradikciju.

$$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \in {}_aL \Rightarrow x_1 = x_2 = a \qquad \ldots(1)$$

$$P, Q \in {}_pL_r \Rightarrow (x_1 - p)^2 + y_1^2 = r^2 \text{ i } (x_2 - p)^2 + y_2^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - p)^2 + y_1^2 = (x_2 - p)^2 + y_2^2 \xRightarrow{x_1 = x_2} y_1^2 = y_2^2$$

$$\xRightarrow[y_1, y_2 > 0]{y_1, y_2 \in \mathbb{H}} y_1 = y_2 \qquad \ldots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow P \equiv Q$$

#kontradikcija

Tačke P i Q ne mogu istovremeno pripadati pravama ${}_aL$ i ${}_pL_r$.

(#) Na primjeru pokazati da u Poincarejevoj ravni postoje (najmanje) tri nekolinearne tačke.

Rj Poincarejeva ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ ← skup pravih

skup tački

$\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$_aL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a,$ a je fiksiran realan broj$\}$

$_pL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-p)^2 + y^2 = r^2,\ r > 0,$ p i r su fiksirani realni br.$\}$

Tri tačke su nekolinearne ako istovremeno ne pripadaju ijednoj pravoj.

Izaberimo dvije proizvoljne tačke npr. sa prave $_7L$

$P(7,1),\quad Q=(7,-2)$

i neka je $R(8,1)$. Primjetimo da $R \notin {}_7L$ i da tačke P, Q, R istovremeno ne pripadaju $_aL$ ni za jedno $a \in \mathbb{R}$.

Pokažimo još da ne postoji p i r tako da

P, Q, R istovremeno $\in {}_pL_r$.

I način

Pretpostavimo suprotno tj. pretpostavimo da $\exists_{p,r} \in \mathbb{R}$ t.d. $P, Q, R \in {}_pL_r$

Tada

$P(7,1):\quad (7-p)^2 + 1 = r^2$

$Q(7,-1):\quad (7-p)^2 + 4 = r^2$

$R(8,1):\quad (8-p)^2 + 1 = r^2$

$\Rightarrow (7-p)^2 + 1 = (7-p)^2 + 4$

$1 = 4$

#kontradikcija Tvrdnja slijedi.

II način

U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da dvije različite tačke ne mogu istovremeno ležati na pravama $_aL$ i $_pL_r$.

$P, Q \in {}_7L,\ R \notin {}_7L,\ R \in {}_8L$ i ne postoji p, r t.d. $P, Q \in {}_pL_r \Rightarrow P, Q$ i R su nekolinearne tačke.

Definicija (Rimanova sfera)

Neka je $\mathcal{L}_R$ skup svih glavnih krugova sfere S^2. Model $\mathcal{R} = \{S^2, \mathcal{L}_R\}$ nazivamo Rimanova sfera.

(#) Obrazložiti da li na Rimanovoj sferi postoje dvije tačke koje pripadaju dvjema različitim sfernim pravama. Ako postoje, odrediti koje su to dvije tačke i koje su to sferne prave (glavni krugovi).

Rj. Posmatrajmo sjeverni i južni pol Rimanove sfere tj. posmatrajmo tačke $N(0,0,1)$ i $S(0,0,-1)$.

Sferne prave (glavni krugovi) su oblika

$$\mathcal{G} = \{(x,y,z) \in S^2 \mid ax+by+zc=0,\ a,b,c \in \mathbb{R} \text{ fiksirani od kojih je najmanje jedan } \neq 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ i } ax+by+cz=0,\ a,b,c \in \mathbb{R} \text{ fiksirani bar jedan } \neq 0\}$$

npr. za $a=0$, $b=1$, $c=0$:

$$\mathcal{G}_1 = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y=0\}.$$

za $a=1$, $b=0$, $c=0$:

$$\mathcal{G}_2 = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x=0\}.$$

Vrijedi $N, S \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

$\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ su tražene sferne prave

<u>Definicija</u> (abstraktna geometrija)

Abstraktna geometrija $\mathcal{A}$ se sastoji od skupa $\mathcal{S}$, čije elemente nazivamo tačke, zajedno sa familijom $\mathcal{L}$ nepraznih podskupova od $\mathcal{S}$, što nazivamo familija pravih, za koje vrijedi:

(i) Za svake dvije tačke $A, B \in \mathcal{S}$ postoji prava $p \in \mathcal{L}$ takva da $A \in p$ i $B \in p$.

(ii) Svaka prava ima najmanje dvije tačke.

(#) Pokazati da je Dekartova ravan $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ abstraktna geometrija.

Rj. Prisjetimo se da je $\mathcal{L}_E$ skup svih vertikalnih i ne-vertikalnih pravih.

vertikalna prava: $L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a,\ a \text{ je fiksiran realan broj}\}$

ne-vertikalna prava: $L_{k,n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx+n,\ k \text{ i } n \text{ su fiksirani realni brojevi}\}$

Trebamo pokazati da vrijede osobine (i) i (ii) iz definicije abstraktne geometrije.

Za prvu osobinu, izaberimo proizvoljne dvije različite tačke $P(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ i $Q(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ i pokažimo da postoji prava u $\mathcal{L}_E$ koja sadrži ove dvije tačke. Posmatraćemo dva slučaja

1° $x_1 = x_2$

Pa neka je $x_1 = c$. Tada $x_2 = c \Rightarrow P, Q \in L_c$

$$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c\}$$
$$= \{(c,y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad c \text{ fiksiran realan broj}$$

2° $x_1 \neq x_2$

Odredićemo k i n tako da vrijedi $P, Q \in L_{k,n}$.

Tačke P i Q zadovoljenaju sljedeću jednakost $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \iff y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \iff$$

$$\iff \quad y=\underbrace{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}_{k}x \underbrace{-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1+y_1}_{n}$$

$$\Rightarrow \quad k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad n=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1+y_1=-kx_1+y_1$$

$$\Rightarrow \quad P, Q \in L_{k,n}$$

$$L_{k,n}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=kx+n, \ k \text{ i } n \text{ su fiksirani realni brojevi}, \ k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \ n=-kx_1+y_1\}$$

Pokažimo još da svaka prava sadrži najmanje dvije tačke

$L_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=a\} \Rightarrow$ npr. $M(a,1)$, $N(a,\sqrt{7}) \in L_a$

$L_{k,n}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=kx+n\} \Rightarrow$ npr. $A(0,n)$, $B(1,k+n) \in L_{k,n}$

Prema tome $\mathcal{E}=\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ je abstraktna geometrija.

(#) Pokazati da je Poincarejeva ravan $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ abstraktna geometrija.

Rj. Prisjetimo se $\mathcal{L}_H$ je skup svih pravih tipa I i II

tip I: $_aL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a,\ a \text{ je fiksivan realan broj}\}$

tip II: $_pL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-p)^2 + y^2 = r^2,\ p \text{ i } r \text{ su fiksirani realni brojevi}, r > 0\}$

$\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

Trebamo pokazati da vrijede osobine I i II iz definicije abstraktne geometrije.

Za prvu osobinu izaberimo dvije različite tačke $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ iz $\mathbb{H}$ i pokažimo da postoji prava koja sadrži ove dvije tačke

$P, Q \in \mathbb{H} \Rightarrow y_1 > 0$ i $y_2 > 0$.

Posmatrajmo dva slučaja

1° $x_1 = x_2$

Pa ako je $x_1 = c \Rightarrow x_2 = c \Rightarrow P, Q \in {}_cL \in \mathcal{L}_H$

$$\left({}_cL = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x = a\} = \{(a,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \right)$$

2° $x_1 \neq x_2$

Izračunajmo p i r tako da $P, Q \in {}_pL_r$.

$$P: \quad (x_1-p)^2+y_1^2=r^2$$
$$Q: \quad (x_2-p)^2+y_2^2=r^2$$

$$x_1^2-2x_1p+p^2+y_1^2=r^2$$
$$-\quad x_2^2-2x_2p+p^2+y_2^2=r^2$$

$$x_1^2-x_2^2-2p(x_1-x_2)+y_1^2-y_2^2=0$$

$$-2p(x_1-x_2)=x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2$$

$$p=\frac{x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2}{2x_2-2x_1}$$

$$(x_1-p)^2+y_1^2=r^2$$
$$(x_2-p)^2+y_2^2=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$r=\sqrt{(x_1-p)+y_1^2}$$

Time smo dobili da je $p=\dfrac{y_2^2-y_1^2+x_2^2-x_1^2}{2(x_2-x_1)}$, $r=\sqrt{(x_1-p)^2+y_1^2}$.

$$P,Q\in {}_pL_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{H} \;\middle|\; \Big(x-\underbrace{\frac{y_2^2-y_1^2+x_2^2-x_1^2}{2(x_2-x_1)}}_{=p}\Big)^2+y^2=\underbrace{\Big(x_1-\frac{y_2^2-y_1^2+x_2^2-x_1^2}{2(x_2-x_1)}\Big)^2+y_1^2}_{=r}\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-p)^2+y^2=r^2,\ p=\frac{y_2-y_1+x_2^2-x_1^2}{2(x_2-x_1)},\ r=\sqrt{(x_1-p)^2+y_1^2}\right\}$$

Lagano je vidjeti da svaka Poincarejeva prava sadrži najmanje dvije tačke.

(npr. $(a,5),(a,8)\in {}_aL$ $\quad(0,\sqrt{r^2-p^2}),(p,r)\in {}_pL_r$)

Poincarejeva ravan $\mathcal{H}=\{\mathbb{H},\mathcal{L}_H\}$ je apstraktna geometrija.

(#) Pokazati da je Rimanova sfera $\mathcal{R} = \{S^2 | \mathcal{L}_R\}$ abstraktna geometrija.

Rj.

skup tačaka

Rimanova sfera $\mathcal{R} = \{S^2, \mathcal{L}_R\}$

skup pravih

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$$

$\mathcal{L}_R$ skup svih glavnih krugova $\mathcal{G}$ sfere S^2

$$\mathcal{G} = \{(x,y,z) \in S^2 \,|\, ax+by+cz=0,\ a,b,c \text{ su fiksirani realni brojevi od kojih je bar jedan nenula}\}$$

Trebamo pokazati da vrijede osobine (i) i (ii) iz definicije abstraktne geometrije.

Pa izaberimo dvije proizvoljne tačke $P(x_1,y_1,z_1)$ i $Q(x_2,y_2,z_2)$ iz S^2 i pokažimo da postoji glavni krug $\mathcal{G}$ koji sadrži ove dvije tačke.

Drugim riječima trebamo odrediti realne brojeve a,b,c, od kojih je najmanje jedan nenula takve da

$$\begin{aligned} a x_1 + b y_1 + c z_1 &= 0 \\ a x_2 + b y_2 + c z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Time smo dobili dvije jednačine sa tri nepoznate. Tačnije imamo dvije homogene linearne jednačine sa tri nepoznate i ovaj sistem ima beskonačno mnogo nenula rješenja. Drugim riječima, bez obzira na izbor tački P i Q uvijek postoje a, b i c koji rješavaju ovaj sistem. Time postoji glavni krug $\mathcal{G}$ takav da $P, Q \in \mathcal{G}$.

Na kraju, svaki glavni krug ima najmanje dvije tačke.

$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1, \ ax+by+cz=0,$

a, b, c su fiksirani realni brojevi, bar jedan od njih $\neq 0\}$

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad 0$

$$cz = -ax - by$$

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$$

$$z^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 x^2 + 2\frac{ab}{c^2}xy + \left(\frac{b}{c}\right)y^2$$

$$z^2 = \frac{a^2}{c^2}x^2 + \frac{2ab}{c^2}xy + \frac{b^2}{c^2}y^2$$

$$x^2+y^2 = 1 - z^2$$

$$x^2+y^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}x^2 - \frac{2ab}{c^2}xy - \frac{b^2}{c^2}y^2 \quad / \cdot c^2$$

$$\underline{c^2x^2} + \underline{\underline{c^2y^2}} = c^2 \underline{-a^2x^2} - 2abxy \underline{\underline{-b^2y^2}}$$

$$(c^2+a^2)x^2 + (c^2+b^2)y^2 = c^2 - 2abxy$$